Замечание 2. Если $a = 4$, рациональное относительно ϕ решение уравнения (1) имеет вид

$$y = -\frac{15}{\phi} - \frac{h_1(t)}{\phi^2} - \frac{h_2}{\phi^3},$$

где $h_1(t)$ — произвольная функция, h_2 — произвольная постоянная.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф14М–148).

Литература

1. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П. *Об одном обобщении уравнения Шази с подвижной особой линией* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1085–1094.

КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ

В.С. Немец

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
nemets@grsu.by

Истоки структурного метода следует искать в работе [1], где указывалась структура полиномиальных решений уравнения Риккати и указывались условия, когда все полиномы указанной структуры будут решениями одного и того же уравнения. Дальнейшие исследования в этом нправлении проводились различными учеными по линии применения этого метода к более общему классу уравнений. В работах [2, 3] разработан структурный метод построения полиномиальных решений для алгебраического диференциального уравнения общего вида

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \prod_{k=1}^{s_i} \{w^{(l_{ki})}\}^{\nu_{ki}} = 0, \tag{1}$$

где l_{ki} и ν_{ki} $(k = 1, 2, \dots, s_i,\ \ i = 1, 2, \dots, N)$ — целые неотрицательные числа, функция $B_i(z)$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ является полиномом комплексного переменного z. Все это систематизировано и изложено в монографии [4].

В дальнейшем была исследована взможность применения структурного метода к нахождению рациональных решений. Для алгебраического дифференциального уравнения общего вида (1) эти исследования изложенны в [5], где при различных возможных группировках членов уравнения (1) указывались возможные структуры рациональных решений. В частности, часто в качестве структуры рационального решения получалась рациональныая функция

$$w(z) = \varepsilon_t \frac{P(z)}{Q(z)} + \frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}, \quad t = 1, 2, \dots, \delta, \quad \delta \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где P, Q, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — полиномы косплексного переменного z, $\varepsilon_t = \varepsilon^t$ — корни уравнения $\varepsilon^\delta = 1$, $\delta \in \mathbb{N}$. Следует отметить что как правило полиномы P, Q вполне конкретно определяются видом уравнения (1), а полиномы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ имеют некоторый произвол.

Найдем условия, когда все рациональные функции (2) будут решениями уравнения (1). Доказывается следующая

Теорема. *Для того, чтобы все рациональные функции из семейства* (2) *были решениями алгебраического дифференциального уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы рациональные функции* $P(z)/Q(z)$ *и* $\mathfrak{P}(z)/\mathfrak{Q}(z)$ *удовлетворяли системе тождеств*

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(\lambda)} \sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(\lambda)} \cdots \sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(\lambda)} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{ki}}{\lambda\chi_{k\tau_k}} \left\{ \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)^{(l_{ki})} \right\}^{\nu_{ki}-\lambda\chi_{k\tau_k}} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)}\right)^{(l_{ki})} \right\}^{\lambda\chi_{k\tau_k}} \equiv 0, \tag{3}$$

где $\lambda = 0, 1, \ldots, \delta - 1$, *числа* $\gamma_k(\lambda)$ *и* ${}_\lambda\chi_{k\tau_k}$ *определяются в зависимости от того, какому классу вычетов по модулю числа* δ *принадлежит число* $\sum_{k=1}^{s_i} j_k$ *в* (4).

Идея доказательства состоит в том, что если подставить все рациональные функции (2) в уравнение (1), то после элементарных преобразований, получим систему тождеств

$$\sum_{i=1}^{N} B_i(z) \sum_{j_1=0}^{\nu_{1i}} \sum_{j_2=0}^{\nu_{2i}} \cdots \sum_{j_{s_i}=0}^{\nu_{s_i i}} \varepsilon_t^{\sum_{k=1}^{s_i} j_k} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{ki}}{j_k} \left\{ \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \right)^{(l_{ki})} \right\}^{\nu_{ki} - j_k} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{P}(z)}{\mathfrak{Q}(z)} \right)^{(l_{ki})} \right\}^{j_k} \equiv 0, \qquad (4)$$

где $j = 1, 2, \ldots, \delta$. На основании того, какому классу вычетов по модулю числа δ принадлежит число $\sum_{k=1}^{s_i} j_k$, в итоге преобразований и приходим к системе (3).

Достаточность утверждения теоремы следует из того факта, что если сложить все тождества системы (3) и выполнить группировку членов, то получим тождества (4). Это и означает, что все рациональные функции семейства (2) будут решениями алгебраического дифференциального уравнения (1).

С помощью сформулированной теоремы указываются классы дифференциальных уравнений (1) которые имеют максимальное количество рациональных решений заданной структуры. Например структуры вида (2), когда $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$, $\mathfrak{P}(z) \equiv 1$, и т. д.

Литература

1. Rainville E. D. *Necessery conditions for polynomial solutions of certain Riccati equations* // Amer. Math Monthly. 1936. Vol. 43. P. 473–476.

2. Горбузов В. Н., Немец В. С. *Построение в целом полиномиальных решений с заданным показателем степени* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1633–1636.

3. Лукашевич Н. А., Денисковец А. А., Немец В. С. *Алгебраические дифференциальные уравнения с максимальным числом полиномиальных решений заданной структуры* // Диффренц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2172–2174.

4. Горбузов В. Н. *Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений.* Гродно: ГрГУ, 2006. 255 с.

5. Немец В. С. *Структурный метод построения рациональных решений алгебраических дифференциальных уравнений* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. 2007. Сер. 2, № 4(59). С. 57–63.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. М. Пецевич, Д.Н. Щевченя

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

В работе, на предмет отсутствия подвижных многозначных особенностей, продолжаем [1] рассматривать систему двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = A_2 y^2 + A_1 y + A_0, \quad y'^2 = (b_{12} y + b_{02}) x^2 + (b_{11} y + b_{01}) x + b_{10} y + b_{00}, \qquad (1)$$

где A_i, $i = \overline{0,2}$ — полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, b_{jk}, $j = \overline{0,1}$, $k = \overline{0,2}$ — аналитические по t функции, $A_2 \neq 0$, $|b_{12}| + |b_{02}| \neq 0$, и правые части ее уравнений не являются одновременно полными квадратами.

В [1] было показано, что справедлива

Лемма 1. *Для того, чтобы дифференциальная система* (1) *не имела подвижных многозначных особенностей, необходимо, чтобы степень многочленов* A_i, $i = \overline{0,2}$ *по переменной* x *была не выше* 4.